

Silkeborg 09-02-10

MATEMATIK-KOMPENDIUM

TIL KOMMENDE ELEVER PÅ DE GYMNASIALE

UNGDOMSUDDANNELSER I SILKEBORG

(HF, HHX, HTX & STX)

Udarbejdet af matematiklærere fra HF, HHX, HTX & STX.

PS: Hvis du opdager fejl i kompendiet/løsningerne, så send venligst besked til fk@silkeborg-gym.dk

Indhold

1. Indledning	side
2. Regnearternes hierarki og parenteser	side
3. Brøkgregning	side
4. Reduktion	side
5. Ligninger	side
6. Den rette linje – proportionalitet	side
7. Potensregning	side
8. Procentregning	side
9. Trekantsberegninger og trigonometri	side
10. Blandede, sværere opgaver	side

1. Indledning

Mange elever oplever, at det er svært at starte på en gymnasial ungdomsuddannelse. Dette skyldes naturligvis blandt andet, at man skal til at vænne sig til en anden skole, til andre lærere, til andre klassekammerater, til flere lektier o.s.v. Erfaringen viser, at en del elever specielt synes, at faget matematik volder problemer ved overgangen fra grundskolen til en gymnasial uddannelse. Som følge heraf, er vi en gruppe matematiklærere, der repræsenterer alle de gymnasiale ungdomsuddannelser i Silkeborg (HF, HHX, HTX & Det Almene Gymnasium), som har lavet dette lille kompendium. Kompendiet henvender sig primært til elever, der ved (eller tror), at de vil starte på en gymnasial ungdomsuddannelse. Meningen er, at såfremt man har lyst til at bruge lidt tid på at ruste sig til sin fremtidige uddannelse, kan man med udbytte arbejde med opgaverne i dette kompendium.

Ud fra læseplanen for matematik i folkeskolen m.m. kan vi se, at folkeskoleelever er bekendt med alle de emner, som vi præsenterer i dette kompendium. Det drejer sig derfor primært om at opnå **rutine**. Matematik er jo på mange måder som et sprog: Hvis man ikke jævnligt bruger sit tysk, vil man med tiden glemme, hvordan man taler tysk. Hvis man skal være sikker bruger af ”sproget matematik”, skal man altså øve sig.

2. Regnearternes hierarki og parenteser.

Regnearternes hierarki:

1. Udregne parenteser
2. Potensopløftning (a^n) og roduddragning (\sqrt{a} og $\sqrt[n]{a}$) – n'te rod
3. Multiplikation og division (dvs. gange og dividere)
4. Addition og subtraktion (dvs. plus og minus)

Forklaring: Regnearternes hierarki fortæller hvilken rækkefølge du skal løse en opgave i. Først parenteser, potensopløftning og roduddragning, derefter gange og dividere og til sidst plus og minus.

Eksempel 1:

$$3+7\cdot 2$$

$$=3+14$$

$$=17$$

Der er i opgaven to regnetegn, plus og gange.

Regnearternes hierarki fortæller, at vi først skal multiplicere, dvs.:

Herefter skal vi addere, dvs:

Eksempel 2:

$$9-(4+3)$$

$$=9-7$$

$$=2$$

Først skal vi udregne parentesen, dvs.

Derefter kan vi trække fra

Opgaver:

2.1. Beregn følgende tal uden brug af lommeregner.

a) $3\cdot 6+2$

b) $5-4\cdot 2$

c) $7+4\cdot 2$

d) $3-4\cdot 2\cdot 5+1$

e) $8\cdot 2-3\cdot 5+4\cdot 3$

f) $4-5-6-1$

2.2. Beregn følgende tal uden brug af lommeregner.

a) $3+(5-3)$

b) $3-2^2$

c) $5\cdot (-2)-(3-1)$

2.3. Reducer følgende udtryk, så de ikke indeholder parenteser.

Husk fortegnsskifte ved hævning af minusparenteser ([se mere om parentesregler her \(link\)](#))

a) $x-(2+3x)$

b) $7a+(4-3a)$

d) $8x^2-(4x^2+5)-(x^2-6)$

Brug af lommeregner:

De fleste lommeregnere følger regningsarternes hierarki. Man skal dog sætte hjælpeparenteser, fx hvor en brøk indeholder flere led (led er størrelser, der lægges sammen eller trækkes fra hinanden) eller faktorer (faktorer er størrelser, der ganges) i tæller eller nævner.

Eksempel 3:

$$3+\frac{10+8}{2\cdot 3}$$

skal løses ved brug af lommeregner.

Indtaster vi opgaven som den står, $3+10+8:2\cdot3$, vil lommeregneren give os svaret på opgaven $3+10+\frac{8}{2}\cdot3$, hvilket er forkert.

Derfor må vi indsætte hjælpeparenteser. Opgaven indtastes som:

$$3+(10+8):(2\cdot3)$$

hvilket giver resultatet

$$=6$$

2.5. Sandt eller falsk? Kontrollér med lommeregner:

a) $7+\frac{12-2}{2\cdot5}=90$

b) $\frac{\sqrt{20-(-5)}}{2\cdot5}=\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{15+34}=7$

3. Brøkgregning **regneregler for brøker**

Definition:

En brøk er et tal skrevet på formen $\frac{a}{b}$ eller a:b eller a/b. (Husk! b kan aldrig være nul!)

Brøkdele ser du ofte i din hverdag, uden du måske tænker over det: lagkager og pizzaer deles ofte i lige store dele og er gode eksempler på brøkdele.

Udfordringen i brøker er, at man ikke uden videre kan lægge $\frac{3}{7}$ til $\frac{2}{5}$!!

Ligesom man heller ikke umiddelbart kan lægge kroner til euro!!

Eksempel:

Besvar uden brug af lommeregner, hvad er størst: $\frac{2}{5}$ eller $\frac{1}{3}$

Find fællesnævner for de to brøker ved at gange med samme tal i tæller og nævner:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} \text{ og } \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{6}{15} \text{ og } \frac{5}{15}$$

Konklusion: $\frac{2}{5}$ er største brøk, da den forlænget til 15'dele bliver $\frac{6}{15}$ og $\frac{1}{3}$ blev kun $\frac{5}{15}$

Opgaver:

- 3.1. a) Hvilket tal står som tæller i brøken $\frac{8}{11}$?
b) Hvilket tal står som nævner i brøken $\frac{3}{5}$?

Måske kan du bedre huske hvad der er **tæller** og **nævner**, hvis du tænker:
Tæller som i **T-shirt** og **N**ævner som i **Nederdel**!

3.2. Beregn følgende tal uden brug af lommeregner.
Find først fællesnævner!

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

c) $\frac{3}{7} - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{1}{2} + \frac{4}{11} - 2$

e) $1 - \frac{9}{13} + \left(\frac{2}{13} - 3\right)$

3.3. Skriv resultaterne fra 3.2 som **uforkortelig brøk**.

3.4. Beregn følgende tal uden brug af lommeregner. **Se evt. regnereglerne for brøker her**
Resultatet skal angives som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right)}{3}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}\right)$

e) $6 - \frac{13}{3} - \left(1 + \frac{4}{9}\right)$

3.5. Beregn følgende tal uden brug af lommeregner.
Resultatet skal angives som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{4}{7} : 3$

b) $\frac{2}{7} : \frac{3}{9}$

c) $6 : \frac{4}{5}$

3.5. Forkort nedenstående brøker mest muligt.

a) $\frac{4x}{3x}$

b) $\frac{12x^2}{7x}$

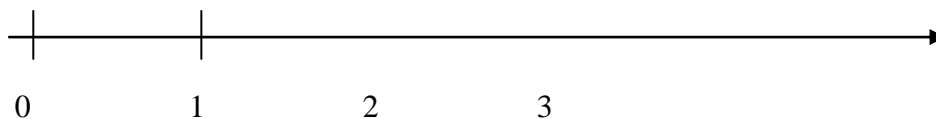
c) $\frac{12x^2 - 3x^2}{7x}$

d) $\frac{3a}{4a^2}$

e) $\frac{3x - 2x}{2x}$

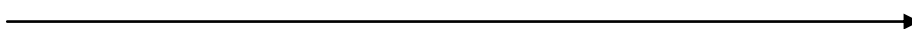
Blandede opgaver med brøker

3.6. Inddel denne tallinje i 5.dele:



3.7. Markér følgende brøker på tallinjen:

$$\frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{25}{8}, \frac{-3}{4}$$



3.8. Jens fylder $\frac{2}{3}$ af sofaen. Du må fylde $\frac{1}{4}$.

Kan I være der begge to?

Hvis der er plads tilbage, hvor meget er det så? – svar i brøker.

3.9. En mus har gnavet $\frac{1}{9}$ af den runde ost.

Din mor har sagt, at du må tage halvdelen af resten. Hvor stor brøkdel får du?

3.10. Per har tre brød, Poul har fem brød og Lille Lise har ingen, men er sulten! Per og Poul deler deres brød ligeligt med Lise. Hun giver dem 8 skilling som tak for brødene. Per foreslår straks Poul, at de skal have fire skilling hver, fordi de jo alle tre blev mætte! Poul synes nu ikke, at det er rimeligt, for han bidrog med fem brød, så han foreslår, at han får 5 skilling, mens broderen kun får 3.
Endeligt foreslår Lise, at Per får 1 skilling og Poul får 7 skilling.
Hvem af de tre foreslår den mest retfærdige deling af skillingerne?

4. Reduktion

Kvadratsætninger	Eksempler
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	$(x+3)^2 = x^2 + 9 + 6x$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	$(a-1)^2 = a^2 + 1 - 2a$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(b+5)(b-5) = b^2 - 25$

Andre eksempler: $x+x+x+x+x = 5x$
 $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

Opgaver:

4.1. Reducer nedenstående udtryk mest muligt.

a) $4+3x-5$

b) $7-x-2x$

c) $5x-(x+2x)$

d) $2x+x^2-(x-4x^2)$

e) $6+x-(3+x-(x-3))$

f) $2a+3-(3a-1)$

4.2. Reducer nedenstående udtryk mest muligt.

a) $5 \cdot (2-z) - 9 + 6z$

b) $3 \cdot (2+x) - 2x$

c) $7(2+a) - (10+6a)$

4.3. Omskriv nedenstående udtryk ved at sætte en faktor uden for parentes.

Eksempel: $3x+6y+3=3(x+2y+1)$

a) $2x+2y$

b) $4x-8$

c) $ab-ca$

4.4. Omskriv nedenstående udtryk ved at sætte en faktor uden for parentes.

Eksempel: $3(x+1)+6(x+1)=(x+1)(3+6)=9(x+1)$

a) $(a+b)x-(a+b)$

b) $y(x+z)-2(x+z)$

c) $(a+2)b-(a+2)c$

4.5. Reducer nedenstående udtryk mest muligt:

a) $(5x) \cdot 3$

b) $(5x) \cdot x$

c) $(4x) \cdot (3x)$

4.6. Omskriv nedenstående udtryk ved at gange parenteserne sammen:

a) $(x-2)(x+3)$

b) $(x-1)(x+7)$

c) $(x+3)(x+1)$

d) $(a-1)(2+a)$

e) $(y-4)(1-y)$

f) $(q+1)(1-q)$

5. Ligninger

Eksempel 1:

Vi vil løse denne ligning: $x + 4 = 10$

Ligningen ” $x + 4 = 10$ ” er et såkaldt *åbent udsagn*, hvor man for at løse ligningen skal finde den x -værdi, der gør udsagnet til et sandt udsagn.

Vi kan se, at løsningen til ligningen er $x=6$, fordi når tallet 6 indsættes på x 's plads, så får vi et sandt udsagn: $6+4=10$.

Eksempel 2:

Nogle gange kan man ikke umiddelbart se, hvilken x -værdi der gør udsagnet sandt. Det er for eksempel tilfældet, hvis man skal løse følgende ligning:

$$2(x - 3) = -x + 6$$

Man kan så løse ligningen (isolere x) ved at gennemføre samme regneoperation på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{array}{ll} 2x - 6 = -x + 6 & \text{Først ganger vi ind i parentesen på venstre side:} \\ 2x - 6 + 6 = -x + 6 + 6 & \text{Vi lægger 6 til på begge sider} \\ 2x = -x + 12 & \text{og reducerer:} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x + x = -x + 12 + x & \text{Vi lægger } x \text{ til på begge sider} \\ 3x = 12 & \text{og reducerer:} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} & \text{Til sidst dividerer vi med 3 på begge sider} \\ x = 4 & \text{og reducerer:} \end{array}$$

Vi kan kontrollere resultatet ved at indsætte $x=4$ i den oprindelige ligning.

Dermed får man udsagnet: $2(4 - 3) = -4 + 6$

En udregning viser, at begge sider giver tallet 2, så udsagnet er sandt, og løsningen $x=4$ er OK.

Opgaver

Løs følgende ligninger

5.1 $2x + 3 = 7$

Hjælp 1: Træk først 3 fra på begge sider!

Hjælp 2: Divider dernæst med 2 på begge sider!

5.2 $3x - 5 = 2x + 5$

5.3 $3(x + 2) = x + 8$

Hjælp 1: Begynd med at gange 3 ind i parentesen.

5.4 $x - 2(x - 1) = 2x + 5$

Hjælp 1: Husk, at når en minusparentes hæves, skal der skiftes fortegn.

5.5

Jette skal købe vindruer, som koster 28 kr. pr. kilogram.

Opstil en ligning, som kan bruges til at beregne, hvor meget Jette kan få for 78 kr.?

Hjælp 1: Lad x være antal kg vindruer

5.6

En taxa i Vimmerby tager 45 kr. i startpenge, og derpå koster det 15 kr. pr. kilometer.

- Bjarne skal køre 6 kilometer i taxa. Hvor meget skal han betale?
- Anna skal køre i taxa, men hun har kun 100 kr. Hvor langt kan Anna køre i taxa for de 100 kr.?
- Vi kalder prisen for taxaturen y og antallet af kilometer for x . Opstil en ligning, der viser sammenhængen mellem y og x .

5.7

Eleverne i 8.b skal til at danse moderne dans i klasseværelset. De skal derfor stille sig op med hinanden i hånden, så de danner en cirkel. De 24 elever har tilsammen en rækkevidde på 38,5 meter.

Hvor bredt skal klasseværelset være for at have plads til den rundkreds, som eleverne danner?

Hjælp 1: Hvilken sammenhæng er der mellem omkredsen og diameteren for en cirkel?

5.8

Lotte har været til eksamen, og hun har løst en ligning på følgende vis:

$$\begin{aligned}\frac{3(x - 4)}{7} &= 6 \\ 3(x-4) &= 42 \\ x-4 &= 14 \\ x &= 18\end{aligned}$$

- Kontrollér, at Lotte har fundet den korrekte løsning til ligningen.

Hjælp 1: Indsæt $x=18$ i den oprindelige ligning.

- Beskriv, hvilke regneoperationer Lotte bruger i forbindelse med de fire ”skridt”, der fører frem til løsningen af ligningen.

Hjælp 1: Fra første til anden linje; der ganges med 7 på begge sider af lighedstegnet.

5.9

Jonas har været til eksamen, og han har løst en ligning på følgende vis:

$$4(x+2)-17=1$$

$$4x+8-17=1$$

$$4x-9=1$$

$$4x=-8$$

$$x=-2$$

- Kontrollér, om Jonas har fundet den korrekte løsning til ligningen.
- Beskriv, hvilke regneoperationer Jonas bruger i forbindelse med de fire ”skridt”, der fører frem til løsningen af ligningen.

6. Den rette linje:

Ligningen for en ret linje er:

$$y = ax + b$$

Forskriften for en lineær funktion er:

$$f(x) = ax + b$$

Eksempel:

Tegn grafen for linjen: $y = 3x - 2$

Metode 1.

Der laves et "sildeben". I dette beregnes nogle støttepunkter.

x	0	2	4
$y = 3x - 2$	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	$3 \cdot 2 - 2 = 4$	$3 \cdot 4 - 2 = 10$

Vi ved nu, at punkterne (0, -2), (2, 4) og (4, 10) ligger på linjen.

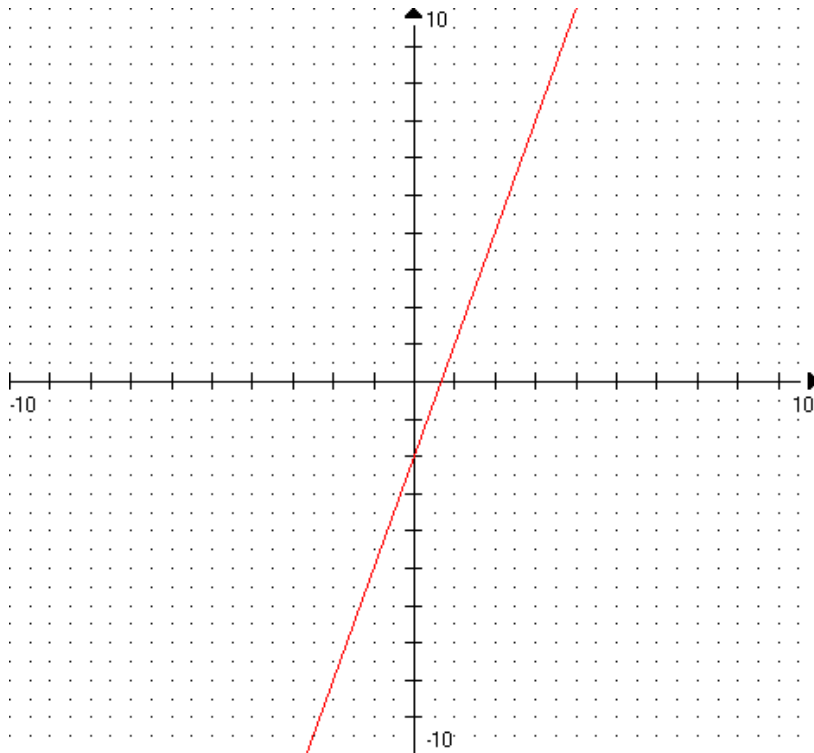
Disse punkter indtegnes i et koordinatsystem og forbindes.

Metode 2.

Man genkender b-værdien som skæring m. y-aksen. Dvs. grafen skærer y-aksen i punktet (0, -2).

Hældningstallet genkendes som a-værdien og er 3.

Dvs. fra (0, -2) går man én enhed til højre og 3 enheder op. Dette gentages og punkterne forbindes.



Opgaver:

6.1

Tegn følgende linjer i samme koordinatsystem:

Linje a: $y = -2x + 4$

Linje b: $y = -x$

Linje c: $y = 4$

d. $y = -\frac{3}{5}x - 6$

6.2

Monseiur Pignon står ved sin franske restaurant og fanger frøer, der hopper forbi. Jo flere frøer han fanger, jo flere frølår kan han sælge.

Lav en grafisk fremstilling der viser antallet af frølår som funktion af fangede frøer.

6.3

Din mobiltelefon kostede 500 kr. i anskaffelse og herefter giver du 50 øre i minuttet, når du taler.

- Lav en grafisk fremstilling, der viser sammenhængen imellem prisen for din telefon inklusiv samtale i 6 minutter.
- Angiv forskriften for denne rette linie?

6.4

Prisen, y , for mountain bikes har gennem en årrække udviklet sig som beskrevet ved denne ligning:

$$y = 3.000 + 200x, \text{ hvor } x \text{ angiver antal år efter 2000.}$$

Forklar betydningen af tallene 3.000 og 200 i ovenstående ligning.

7. Potensregning

Potensregneregler

Generelt	Eksempel
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a^4 \cdot b^4 = (a \cdot b)^4$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

Alle opgaverne i dette afsnit regnes uden lommeregner

Eksempel 1:

$$2^2 \cdot 2^5$$

$$=(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$=2^{2+5}$$

$$=2^7$$

Kan også skrives som

hvoraf vi kan se, at 2 multipliceres med sig selv 7 gange. Derfor skal eksponenterne adderes, dvs.

Eksponenternes sum findes og resultatet bliver

Eksempel 2:

$$10^4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2$$

eksponenterne, dvs.

$$=10^{4+(-7)+2}$$

dvs.

$$=10^{-1}$$

Potenstillene er alle 10er-potenser. Vi skal addere

den positive parentes fjernes og summen af eksponenterne bliver $4-7+2$,

7.1 Reducér følgende udtryk

a) $2^2 \cdot 2^5$

b) $10^{10} \cdot 10^2 \cdot 10^3$

d) $10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4$

7.2 Reducér følgende udtryk

a) $\frac{2^7 \cdot 2^4}{2^3}$

b) $\frac{10^7 \cdot 10^8}{10^{12}}$

c) $\frac{(10^2)^3 \cdot 10^{-5}}{(10^4)^2}$

7.3 Reducér følgende udtryk

a) $\frac{2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 2^{-7}}{2^{-3} \cdot (2^2)^3}$

c) $\frac{(-3)^{-2} \cdot (-3)^4}{(-3)^{-2}}$

b) $(-5)^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-4}$

7.4 Find rumfanget af en kugleformet dykkerklokke, når den indvendige radius er 1,35 m.

7.5 Jordens radius er 6 378 160 meter.

Hvor stor er jordens overflade i km²?

7.6 Ved solformørkelse dækker månen for solen.

Afstanden fra jorden til solen er $1,5 \cdot 10^8$ km.

Afstanden fra jorden til månen er $2,5 \cdot 10^5$ km.

Hvor mange gange større er afstanden til solen?

7.7 Et gammelt sagn fortæller at opfinderen af skakspillet skulle have ønsket 1 riskorn på det første felt og 2 på det andet felt, 4 på det tredje felt, 8 på det fjerde felt osv., da hans konge havde lovet ham opfyldelse af et ønske for den vidunderlige opfindelse. Hvor mange riskorn skulle der lægges på det sidste felt?

(Der er 64 felter på et skakbræt)

Et riskorn vejer 0,1 gram.

Hvor meget vejer riskornene på det sidste felt?

8. Procentregning

Definition

Procent betyder pr hundrede.

Dvs. at hver gang vi taler om procent i forhold til decimaltal – er der en forskel på 100.

Eksempel:

$$23\% = 23 \text{ hundrededele} = \frac{23}{100} = 0,23$$

8.1 Udregn ved hjælp af lommeregner

a) Hvad er 11% af 17?

b) Hvad er 8,7% af 3,26?

c) Hvor mange % er 17 af 34?

d) Hvor mange % er 2,3 af 78?

e) Hvor mange % er 373 af 87

f) Hvad er hele beløbet hvis 35% er 45?

g) Hvad er hele beløbet, hvis 11,2% er 87?

8.2

Skemaet nedenfor indeholder oplysninger om nogle varer som er sat ned fra en *gl. pris* til en *ny pris*. Udfyld resten af skemaet.

Gl. pris	120	385	
Rabat, kr.		30	
Rabat, %	45%		18%
Ny pris			875

8.3

Du køber en bærbar computer der er sat ned fra 9.998 kr. til 6.998 kr.

- Hvor mange procent er computeren sat ned?
- Hvor mange procent er den gamle pris større end den nedsatte pris?

8.4

Vurder hvilke af de 3 svar, der er de rigtige:

En undertøjsforhandler købte et parti BH-er for 1350 kr. Han solgte dem imidlertid for 1150 kr. fordi han kunne tjene godt på trusserne dertil. Hvor mange procent tabte han?

- Han tabte 1150 kr. ud af 1350 kr. Dette omregnes til procent på følgende måde:
 $1150 \text{ kr.} / 1350 \text{ kr.} \cdot 100 \% = \text{ca. } 85,2 \%$
- Han tabte $1350 \text{ kr.} - 1150 \text{ kr.} = 200 \text{ kr.}$ Dette skal divideres med købsprisen (og ganges med 100) for at finde tabet af salget i procent:

$$\frac{1350 - 1150}{1350} 100\% = \text{ca. } 14,8 \%$$
- Tabet på 200 kr. skal ses i forhold til salgsprisen på 1150 kr. og ganges med 100 for at omregne til procent:

$$\frac{1350 - 1150}{1150} 100\% = \text{ca. } 17,4 \%$$

8.5

En vandskadet sofa sælges. Der gives derfor en rabat på 42 %.

Transporterer man selv sofaen hjem fratrækkes yderligere 6 % af den nye pris.

Hvad var sofaens oprindelige pris, når den blev solgt for 3.400 kr. og man selv transporterede sofaen hjem?

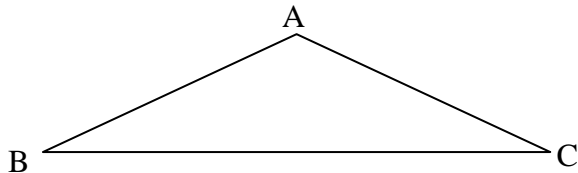
8.6

Salget af frugt og grønt steg med 30 % fra 1999 til 2008.
Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

(Hjælpen her: procenten skal efter 9 år blive 30 %, men procenten skal være den samme hvert år!)

9. Trekantsberegninger

9.1



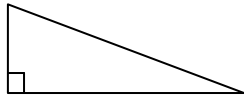
Trekant ABC er ligesidet, og vinkel A har størrelsen 120° .

Hvor stor er vinklerne B og C?

Hjælp 1: Hvor stor er summen af vinklerne i en trekant?

Hjælp 2: Hvor stor er vinklerne B og C i forhold til hinanden, når trekanten er ligebenet?

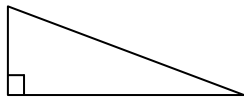
9.2



I en retvinklet trekant er længden af de to kateter 4 og 9.
Hvor lang er hypotenusen?

Hjælp 1: Pythagoras' sætning

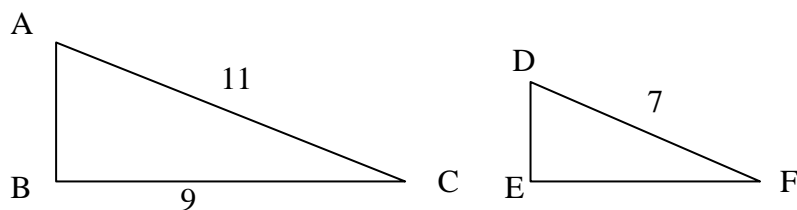
9.3



I en retvinklet trekant er længden af den ene katete 6 og længden af hypotenusen er 11.
Hvor lang er den anden katete?

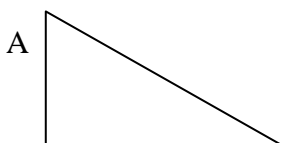
Hjælp 1: Pythagoras' sætning

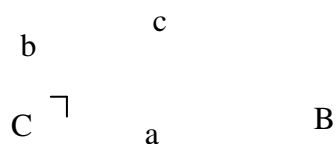
9.4



Trekantene ABC og DEF er ligedannede, og nogle af sidelængderne er angivet på figuren. Beregn længden af siden EF.

9.5





Beregn de ukendte sidellængder og vinkler i den retvinklede trekant ABC, når du har følgende oplysninger:

a) $A=22^\circ$ $c=4$

Hjælp 1: Udnyt, at du kender summen af vinklerne i en trekant.

Hjælp 2: Brug sinus eller cosinus

b) $a=12$ $B=35^\circ$

Hjælp 1: Udnyt, at du kender summen af vinklerne i en trekant.

Hjælp 2: Brug sinus eller cosinus

c) $a=5$ $b=7$

Hjælp 1: Brug tangens til at beregne vinkel A eller B

9.6

Snapselglasset til højre kan rumme 2 cl.

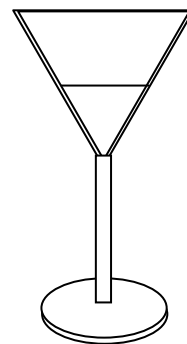
På en bestemt restaurant koster en snaps på 2 cl. 20 kroner. En gæst vil kun have en halv snaps. Tjeneren skænker op, således at overfladen af snapsen når halvt op i glasset som vist på tegningen.

Gæsten betaler ti kroner for lyksaligheden.

Hvor meget fik gæsten at drikke, og hvor meget har gæsten betalt for meget?

Hjælp 1: Hvis diameteren af det kegleformede glas er 4 cm, hvor stor diameteren så af den cirkel som dannes af overfladen af snapsen?

Hjælp 2: Hvordan finder man rumfanget af en kegle?



10. Blandede sværere opgaver

Reduktion:

10.1 Omskriv nedenstående udtryk ved at sætte på fælles brøkstreg:

$$\text{a) } \frac{1}{z+1} + \frac{2}{5} \qquad \text{b) } \frac{1}{a-1} - \frac{1}{6} \qquad \text{c) } \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+c} \qquad \text{e) } \frac{3}{2x} + \frac{4}{x+1} \qquad \text{f) } \frac{2}{5x-5} - \frac{1}{5}$$

$$\text{g) } \frac{34x+6}{11x+2} - 3 \qquad \text{h) } \frac{1}{5x} + 3 + \frac{2}{3}$$

10.2 Omskriv nedenstående brøker ved at forkorte:

$$\text{a) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} \qquad \text{b) } \frac{z^2 - 2z + 1}{z-1} \qquad \text{c) } \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x+1}$$

$$\text{d) } \frac{a^2 - 1}{a+1} \qquad \text{e) } \frac{x^2 - 4}{x+2} \qquad \text{f) } \frac{9x^2 - 16}{3x-4}$$

10.3 Omskriv nedenstående brøker ved at forkorte:

$$\text{a) } \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x+y} \qquad \text{b) } \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a+2b} \qquad \text{c) } \frac{x^2 - y^2}{x+y}$$
$$\text{d) } \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{3y-x} \qquad \text{e) } \frac{4x^2 - 8xy + 4y^2}{3x^2 + 3y^2 - 6xy} \qquad \text{f) } \frac{4a^2 + 4az + z^2}{z^2 - 4a^2}$$

10.4 Omskriv nedenstående udtryk ved at sætte på fælles brøkstreg:

$$\text{a) } \frac{1}{a+b} + \frac{3}{a^2 - b^2} \qquad \text{b) } \frac{1}{x+y} + \frac{3}{2x^2 - 2y^2} - \frac{1}{2} - \frac{y^2 + 2x + 3}{2(x-y)(x+y)}$$

$$\text{c) } \frac{1}{a} + \frac{2(a-b)}{a^2 - b^2} - \frac{2}{a+b} \qquad \text{d) } \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2 + b^2 + 2ab}$$

10.5 Reducer følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $\frac{16^2 \cdot 2^{-3} \cdot 8}{4^3 \cdot 2^{18} \cdot \frac{1}{64}}$

b) $\frac{(-3)^{-2} \cdot 6^{-2}}{90^{-2}}$

c) $\frac{(3^2)^3 \cdot (3^{-4})^2 \cdot 2}{3^{-2} \cdot 3^6}$

d) $\frac{(-3)^{-4} \cdot (-4)^{-1}}{(-12)^{-2}}$

e) $\frac{(-4)^{-1} \cdot (-5)^{-1}}{(-100)^{-1}}$

10.6

Ved salg af en del produkter, antager man, der er en lineær sammenhæng mellem antal solgte varer (afsætningen) og den pris man tager for varen.

Man kan for en vare lave følgende oversigt:

Afsætningen	Pris pr. stk.
100	100
90	120
80	140
70	160
60	180

1. Lav en kurve (ret linje) hvor x angiver afsætningen og y angiver prisen.
2. Hvilken pris er der tale om, hvis afsætningen er på
 - a. 110 stk.
 - b. 75 stk.
 - c. 25 stk.
3. Hvor mange sælges, hvis prisen pr. stk. er kr.
 - a. 150,-
 - b. 200
4. Bestem forskriften for den lineære funktion $f(x)$, der fastlægger prisen som en funktion af afsætningen x

10.7

En virksomhed nedskriver hvert år værdien af sit inventar (alle de ting, der er købt til virksomheden). Denne afskrivning kan foregå efter en metode, der kaldes den lineære metode. Det betyder, man afskriver med et beløb, der har samme værdi hvert år.

En virksomhed har købt inventar hjem til en værdi af kr. 500.000,-

Virksomheden regner med at beholde inventaret i 8 år, hvorefter det skal skiftes ud. Man antager, at værdien (scrapværdien) efter de 8 år er nede på kr. 20.000,-

1. Indtegn forløbet i et koordinatsystem, idet du har punkterne (0,500.000) og (8,20.000)
2. Hvor stor er den årlige afskrivning?
3. Hvad er værdien (den bogførte værdi) efter 5 år?
4. Opstil forskriften for den funktion, der fastlægger den bogførte værdi til tiden x, hvor x angiver antal år efter inventaret er købt.

10.8

Ved sammenligningen af pris og afsætning, kan der opstilles følgende oversigt:

Afsætningen	Pris pr. stk.
10	10.000
20	9.000
30	8.000
40	7.000
50	6.000

1. Lav en kurve (ret linie) hvor x angiver afsætningen og y angiver prisen.
2. Hvilken pris er der tale om, hvis afsætningen er på
 - a. 25 stk.
 - b. 75 stk.
3. Hvor mange sælges, hvis prisen pr. stk. er kr.
 - a. 4.000,-
 - b. 7.500,-
4. Bestem forskriften for den lineære funktion $f(x)$, der fastlægger prisen som en funktion af afsætningen x

10.9

En virksomhed køber nogle varer hjem, som den sælger videre efterfølgende.

Indkøbsprisen for en bestemt vare er kr. 50,-, pr. stk. og de samlede hjemtagelsesomkostninger er på kr. 500,- uafhængig af hvor mange der købes.

1. Bestem, hvad prisen bliver for købet, hvis der købes
 - a. 200 stk.
 - b. 500 stk.
 - c. 100 stk.
2. Bestem forskriften for den funktion (lineære) der fastlægger den samlede indkøbspris for varerne, når der købes x stk.
3. Bestem hvor mange varer der er købt, hvis den samlede pris er på kr. 4350,-
4. Tegn grafen for funktionen, der fastlægger den samlede indkøbspris.

10.10

En virksomhed sælger nogle bestemte varer. Varerne sælges til en pris på kr. 110,- pr. stk.

1. Bestem den samlede salgspris, hvis der sælges
 - a. 200 stk.
 - b. 500 stk.
2. Virksomheden er selvfølgelig interesseret i at vide, hvor stor fortjenesten er. De beregner derfor, hvad fortjenesten er ved at trække indkøbspriserne fra salgspriserne.
Bestem fortjenesten, hvis virksomheden sælger 200 stk. eller 500 stk.
3. Opstil en forskrift for den funktion, der fastlægger fortjenesten som en funktion af antal solgte stk. (Salgspris - købspris)
4. Tegn det grafiske billede af funktionen.

10.11

A tænker på et helt positivt tal mindre end 1 million. B må stille A 20 spørgsmål, som A skal besvare med ja eller nej. Er det muligt for B at finde tallet? (Hvis ja: Hvordan?)

10.12

Et tog afgår fra Udby kl. 10.00 mod Sønderby, og samtidig afgår et tog fra Sønderby mod Udby. Det første tog tilbagelægger afstanden non-stop på 6 timer, mens det andet, der kører op ad bakke, er 9

timer om turen. Hvad er klokken, når de mødes, hvis man går ud fra, at de to tog kører med konstant fart?

10.13

På en jernbanebro over en rivende flod har en mand tilbagelagt $\frac{3}{5}$ af afstanden, da han opdager et tog, der kommer kørende mod ham med 100 km/t. Uanset hvilken ende han løber mod, vil han nå denne ende samtidig med toget. Hvor hurtigt løber manden?

10.14

Nogle piger og drenge står i en gruppe. Da 8 piger har forladt gruppen, er forholdet mellem antallet af drenge og piger 3:1. Derefter forlader 20 drenge gruppen, og forholdet mellem drenge og piger er nu 5:3. Hvor mange drenge og piger bestod gruppen oprindeligt af?

10.15

Arne, Bent og Christian har en lottoklub. De vinder 1.925.000 kr.

Da de ikke har betalt lige meget i indskud, har de aftalt, at hvis de vinder skal Arne have udbetalt dobbelt så meget som Christian, og Christian dobbelt så meget som Bent.

Hvor meget får de hver ?

10.16

En kaffehandler sælger to slags kaffe : Brazil Extra til 50 kr/kg og Brazil Medium til 34 kr/kg. Han sælger for lidt af den dyre kaffe, så derfor laver han en blanding på 100 kg af de to slags kaffe. Hvor mange kg af Brazil Extra / Brazil Medium skal blandingen indeholde for at kunne sælges for en pris af 40 kr/kg ?

10.17

Lagenlærred kryber 10% i vask. En kunde skal bruge 12 m (efter vask)

Hvor mange meter skal kunden købe for at der er nok?

10.18

En person investerer 100.000 kr. I de følgende fire år går det op og ned med investeringen:

1.år : +10%, 2.år : - 5%, 3. år :+20%, 4.år : - 1%

Hvordan er det gået med investeringen?

Hvad er gennemsnitsforrentningen pr. år (samme % hvert år) over de fire år ?

Hvorfor kan man ikke udregne det således :

$$\frac{10\% + (-5\%) + 20\% + (-1\%)}{4} = \frac{24\%}{4} = 6\%$$

10.19

På en skole er halvdelen af lærerne kvinder og halvdelen er mænd.

Kvindernes gennemsnitsalder er 35 år, mændenes gennemsnitsalder er 43 år.

Hvad er lærernes gennemsnitsalder ?

På en anden skole er fordelingen : 62% kvinder, 38% mænd og her er de kvindelige

læreres gennemsnitsalder også 35 år og de mandlige læreres gennemsnitsalder også 43 år

Hvad er lærernes gennemsnitsalder på denne skole ?

Ekstraopgaver:

Ekstraopgaver inden for en række emner, stammer fra det gamle kompendium.

Det er tanken de skal ligge, så brugerne kan vælge dem til, altså ikke som en del af kompendiet.

De kan ligge som en pdf-fil.

Reduktion

4.6. Omskriv nedenstående udtryk ved at gange parenteserne sammen:

a) $(3x-2)(x+3)$

b) $(4x-1)(2x+3)$

c) $(2y+1)(1-7y)$

4.7. Reducer nedenstående udtryk mest muligt:

a) $(a+3)^2+(a+1)(a+2)$

b) $a^2-3a+(a+1)^2$

c) $(a-1)^2+(a+3)^2$

d) $(y+7)^2-2y^2-14y$

e) $(a+3)(a-3)+a^2+9$

f) $(x+2)^2-(x+2)(x+2)$

4.8. Reducer nedenstående udtryk mest muligt:

a) $\frac{3x+3}{3}$

b) $\frac{3x+6}{9}$

c) $\frac{8x+6}{2}$

Ligninger:

5.10 $-3(x+2) = x - 4(x+2)$

5.11 $\frac{1}{2}x + 4 = 2x - 8$

5.12 $3x - 5 = 6x + 12$

5.13 $x - 5(2x - 4) = 3x + 8$

5.14 $\frac{3}{4}x - 4 = 2x + 3$

5.15 $\frac{2}{3}x - 2 = x - 4$

5.16 $\frac{2}{5}x + 1 = 2x - 2$

5.17 $2x - 5 = \frac{3}{4}x - 4$

5.18 $\frac{1}{2}x - 3 = 3x - 5$

5.19 $2,5x + 1 = 5x - 4$

5.20 $1,5x + 5 = 2,5x + 3$

5.21 $3(x - 5) + 4 = 3x - 11$

Den rette linje:

a. $y = x - 6$

b. $y = -4x + 2$

c. $y = -\frac{1}{2}x - 3$

d. $y = -4x + 6$

e. $y = 2\frac{1}{2}x - 6$

f. $y = -x + 2$

- g. $y = -\frac{1}{2}x$
 h. $y = 4x$
 i. $y = 3\frac{1}{2}x - 6$
 j. $y = -\frac{2}{3}x + 2$
 k. $y = -3x + 2\frac{1}{2}$

Procent:

b) Hvad er 6% af 37,5?

e) Hvor mange % er 5 af 200?

g) Hvor mange % er 31 af 25

10.2

Gl. pris	120	385		750				455
Rabat, kr.		30			45	50		
Rabat, %	45%		18%	12%	10%		20%	
Ny pris			875			925	1235	420

10.3

Samme som opgave 10.2

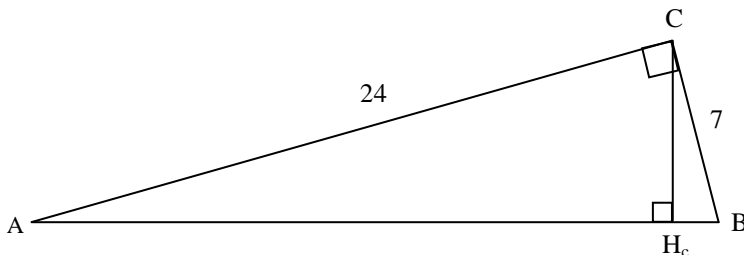
Gl. pris		115	560			235		
Rabat, kr.	19,95			150			60	120
Rabat, %	10%		14%		5%	12%		
Ny pris		95		860	130		240	420

Trekantsberegning:

9.7

I den retvinklede trekant ABC er $a = 7$ og $b = 24$. H_c er fodpunktet af højden fra C.

Beregn $|CH_c|$.

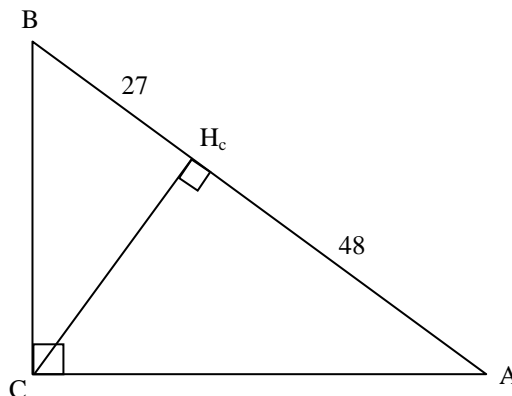


(Hjælp: Udnyt, at trekant ABC og trekant CBH_c er ligedannede)

9.8

I en retvinklet trekant ABC er $|AH_c| = 48$ og $|BH_c| = 27$.

Beregn længderne af trekantens kateter samt længden af højden fra C.

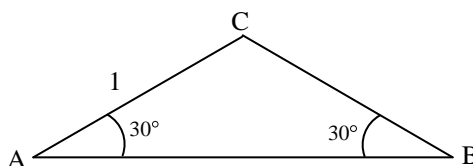


(Hjælp: Udnyt, at trekant ACH_c og trekant ABC er ligedannede)

9.9

I trekant ABC er $\angle A = \angle B = 30^\circ$, og $|AC| = 1$.

Beregn længden $|AB|$



(Hjælp: Tegn højden fra C og udnyt, at der opstår en retvinklet trekant).